

1.

1.1. Como os 7200 votos validamente expressos representam 96% dos votos apurados, considerando x o número de votos apurados, resulta:

$$x \text{ ----- } 100\%$$

$$7200 \text{ ----- } 96\%$$

$$x = \frac{7200 \times 100}{96} = 7500 \text{ votos apurados}$$

Dado que houve 20% de abstenção, os 7500 votos apurados correspondem a 80% do número de acionistas que poderia ter votado.

Seja N o número de acionistas.

Então:

$$N = \frac{7500 \times 100}{80} = 9375$$

A opção correta é a (C).

1.2. Aplicando, passo a passo, o método descrito:

Tabela 1

Lista	A	B	C	D
Votos	1505	2295	1750	1650

Número total de votos: $1505 + 2295 + 1750 + 1650 = 7200$

• **1.º Passo:** Cálculo do DP – divisor padrão

$$DP = \frac{7200}{24} = 300$$

• **2.º Passo:** Cálculo das quotas inferiores (QI)

Lista	A	B	C	D
$\frac{n.º \text{ votos}}{DP}$	$\frac{1505}{300} \approx 5,02$	$\frac{2295}{300} = 7,65$	$\frac{1750}{300} \approx 5,83$	$\frac{1650}{300} = 5,50$
QI	5	7	5	5

• **3.º e 4.º Passos:**

Como $5 + 7 + 5 + 5 = 22 < 24$, é necessário subtrair um múltiplo de 10 ao divisor padrão.

Considerando o divisor modificado $DM = 300 - 10 = 290$, resulta:

Lista	A	B	C	D
$\frac{n.º \text{ votos}}{DM}$	$\frac{1505}{290} \approx 5,19$	$\frac{2295}{290} \approx 7,91$	$\frac{1750}{290} \approx 6,03$	$\frac{1650}{290} \approx 5,69$
QI	5	7	6	5

Como $5 + 7 + 6 + 5 = 23 < 24$, é necessário subtrair 20 ao divisor padrão.

Considerando $DM = 280$, resulta:

Lista	A	B	C	D
$\frac{n.^o \text{ votos}}{DP}$	$\frac{1505}{280} \approx 5,38$	$\frac{2295}{280} \approx 8,20$	$\frac{1750}{280} = 6,25$	$\frac{1650}{280} \approx 5,89$
QI	5	8	6	5

Como $5 + 8 + 6 + 5 = 24$, chegamos à distribuição pretendida.

Assim, o número de elementos que cada lista elegeu para a nova equipa diretiva da ParaPagar, por aplicação do método descrito, é:

Lista A – 5 elementos

Lista B – 8 elementos

Lista C – 6 elementos

Lista D – 5 elementos

2. Aplicando o método descrito:

	Mariana	Pedro	Tiago
Valor global atribuído	$370 + 480 + 230 = 1080 \text{ €}$	$330 + 500 + 205 = 1035 \text{ €}$	$290 + 480 + 190 = 960 \text{ €}$
Valor considerado justo	$\frac{1080}{3} = 360 \text{ €}$	$\frac{1035}{3} = 345 \text{ €}$	$\frac{960}{3} = 320 \text{ €}$
Telemóvel atribuído	A e C	B	-----
Valor monetário recebido	$370 + 230 = 600 \text{ €}$	500 €	0 €
Excedente	$600 - 360 = 240 \text{ €}$	$500 - 345 = 155 \text{ €}$	-----
Valor em falta	-----	-----	320 €
Valor restante	$240 + 155 - 320 = 75 \text{ €}$		
Valor a distribuir	$\frac{75}{3} = 25 \text{ €}$	$\frac{75}{3} = 25 \text{ €}$	$\frac{75}{3} = 25 \text{ €}$

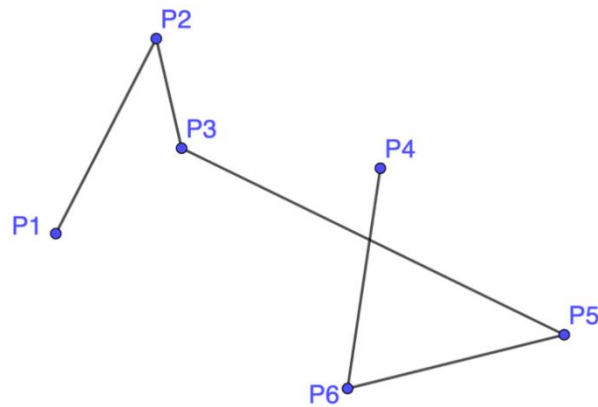
Conclui-se que:

- A Mariana fica com os telemóveis A e C e paga $240 - 25 = 215$ euros.
- O Pedro fica com o telemóvel B e paga $155 - 25 = 130$ euros.
- O Tiago não fica com qualquer telemóvel e recebe $320 + 25 = 345$ euros.

3. Seguindo o método descrito e partindo de P4:

P4 $\overrightarrow{180 \text{ km}}$ P6 $\overrightarrow{185 \text{ km}}$ P5 $\overrightarrow{355 \text{ km}}$ P3 $\overrightarrow{95 \text{ km}}$ P2 $\overrightarrow{185 \text{ km}}$ P1

O grafo resultante é o seguinte:



A quantidade mínima de cabo de fibra ótica, em quilómetros, a renovar é:

$$180 + 185 + 355 + 95 + 185 = 1000 \text{ km}$$

4.

4.1. Para calcular a média, é necessário determinar a marca de cada classe e a respetiva frequência absoluta simples. A partir do histograma de frequências acumuladas, resulta:

Classes	Marca	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada
$[18, 28[$	$\frac{18 + 28}{2} = 23$	15	15
$[28, 38[$	$\frac{28 + 38}{2} = 33$	$75 - 15 = 60$	75
$[38, 48[$	$\frac{38 + 48}{2} = 43$	$120 - 75 = 45$	120
$[48, 58[$	$\frac{48 + 58}{2} = 53$	$140 - 120 = 20$	140
$[58, 68[$	$\frac{58 + 68}{2} = 63$	$150 - 140 = 10$	150

Utilizando as funcionalidades da calculadora gráfica, introduzindo em duas listas distintas a “marca” e a “frequência absoluta simples”, calculam-se os valores das medidas estatísticas referentes a uma variável. O valor da média das idades dos 150 funcionários, arredondado às unidades, é, então, $\bar{x} \approx 40$.

4.2. Como a amplitude do ângulo ao centro, de cada setor do gráfico circular, é diretamente proporcional à frequência absoluta da classe que representa, considerando α a amplitude do ângulo ao centro correspondente à classe $[18, 28[$:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{15}{150} \Leftrightarrow \alpha = \frac{360 \times 15}{150} = 36^\circ$$

A opção correta é a **(D)**.

4.3. Adicionando as frequências absolutas referentes aos 150 funcionários de Lisboa e Vale do Tejo e aos 100 funcionários do Alentejo, resulta a seguinte tabela de frequências:

Classes	Frequência absoluta simples	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
[18, 28[	$15 + 30 = 45$	$\frac{45}{250} = 0,18$	0,18
[28, 38[	$60 + 25 = 85$	$\frac{85}{250} = 0,34$	$0,18 + 0,34 = 0,52$
[38, 48[	$45 + 30 = 75$	$\frac{75}{250} = 0,3$	$0,52 + 0,3 = 0,82$
[48, 58[	$20 + 10 = 30$	$\frac{30}{250} = 0,12$	$0,82 + 0,12 = 0,94$
[58, 68[	$10 + 5 = 15$	$\frac{15}{250} = 0,06$	$0,94 + 0,06 = 1$
Total	250	1	

5. $VF = 500$ $i = 0,03$ n entre 1 e 12 $P = 75$ no máximo

$$P = \frac{500 \times 0,03 \times (1,03)^n}{(1,03)^n - 1}$$

Recorrendo à calculadora, obtém-se a tabela:

x	f1(x):=	x	f1(x):=
	$500 \cdot 0.03 \cdot (1.03)^x / ((1.03)^x - 1)$		$500 \cdot 0.03 \cdot (1.03)^x / ((1.03)^x - 1)$
2.	261.	7.	80.
3.	177.	8.	71.
4.	135.	9.	64.
5.	109.	10.	59.
6.	92.	11.	54.

Dado que o Tiago pode pagar, no máximo, 75 euros de prestação mensal e que quanto maior é o número de prestações maior é o valor total final a pagar, conclui-se que o número de prestações pagas pelo Tiago foi igual a 8. O valor total pago pelo Tiago foi, então, igual a $8 \times 71 = 568$ euros.

6.

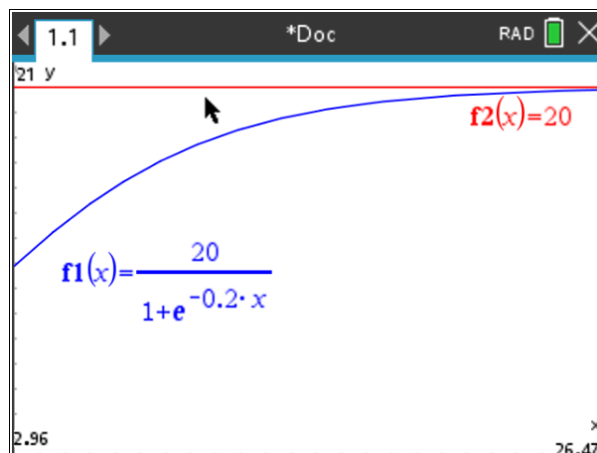
6.1. O número de utilizadores, em milhares, da aplicação ParaPagarApp, no início de 2016, na região do Alentejo é dado por $A(0) = \frac{20}{1 + e^{-0,2 \times 0}} = 10$, ou seja, 10 000 utilizadores.

Conclui-se, então, que o número de utilizadores não residentes no Alentejo, no início de 2016, era de $50\,000 - 10\,000 = 40\,000$ utilizadores.

A percentagem correspondente é $\frac{40\,000}{50\,000} = 0,8$, ou seja, 80%.

6.2. Por observação do mapa, conclui-se que a percentagem correspondente à região do Alentejo é dada por $100\% - (20\% + 25\% + 30\% + 15\%) = 10\%$.

Como 10% de 200 000 corresponde a 20 000 e o modelo apresentado tende a estabilizar com o decorrer do tempo nos 20 milhares (20 000), podemos considerar que o modelo está correto para uma estimativa a longo prazo.



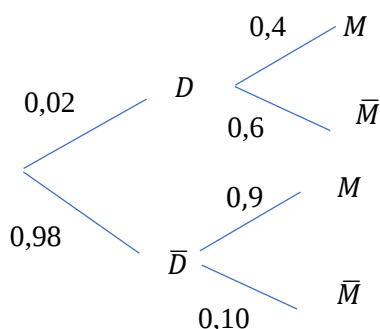
7. Consideremos os seguintes acontecimentos:

D : “O utilizador teve dificuldade na instalação da aplicação.”

M : “O utilizador considerou a aplicação de fácil manuseamento.”

De acordo com o gráfico, em 2018 ($t = 3$), a percentagem de utilizadores que teve dificuldade na instalação da aplicação foi 2% (0,02). Logo, $P(D) = 0,02$, $P(\bar{D}) = 1 - 0,02 = 0,98$, $P(M|D) = 0,4$ e $P(M|\bar{D}) = 0,9$.

Com os dados do enunciado, constrói-se o seguinte diagrama de árvore:



Logo:

$$\begin{aligned} P(\bar{M}) &= P(D \cap \bar{M}) + P(\bar{D} \cap \bar{M}) = P(D) \times P(\bar{M}|D) + P(\bar{D}) \times P(\bar{M}|\bar{D}) = \\ &= 0,02 \times 0,6 + 0,98 \times 0,10 = \\ &= 0,012 + 0,098 = 0,11 \end{aligned}$$

8. De acordo com o que o Tiago se recordava da sua palavra-passe, existem seis possibilidades:

TG851 851TG T851G

G851T 851GT GT851

Como apenas uma destas possibilidades é a palavra-passe correta, a probabilidade de acertar à primeira tentativa é $\frac{1}{6}$.

A opção correta é a **(A)**.

9. Como a probabilidade de o utilizador errar a palavra-passe é 10%, a probabilidade de não errar é, então, 90%.

Logo, a probabilidade pedida é calculada da seguinte forma:

Apenas o 1º utilizador		Apenas o 2º utilizador		Apenas o 3º utilizador		
não erra		não erra		não erra		
$0,9 \times 0,1 \times 0,1$	+	$0,1 \times 0,9 \times 0,1$	+	$0,1 \times 0,1 \times 0,9$	=	$3 \times 0,9 \times 0,1^2$
						$= 0,027$

10. Para construir o intervalo de confiança, é necessário determinar a proporção amostral $\hat{p}$ dos utilizadores da aplicação ParaPagarApp que, na última compra, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros.

Por observação da tabela 4, resulta que:

$$\hat{p} = \frac{81 + 44}{625} = \frac{125}{625} = 0,2$$

A dimensão da amostra é $n = 625$ e o valor de z para um nível de confiança de 90% é $z = 1,645$.

O intervalo de confiança pedido é, então:

$$\left[0,2 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,2(1 - 0,2)}{625}}; 0,2 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,2(1 - 0,2)}{625}} \right] \approx]0,17; 0,23[$$