

1.

1.1. Para determinar o valor da probabilidade, consideramos o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Nesta situação, temos:

$$\frac{A}{1} \quad \frac{S}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{1} \quad \frac{A}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1}$$

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$

Número de casos possíveis: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$$P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

A opção correta é a **(D)**.

1.2. A maioria absoluta corresponde a obter pelo menos 14 votos ($27 : 2 = 13,5$).

Contabilizando a 1.ª preferência, resulta:

<i>Trail</i>	A	M	S	T
1.ª preferência	$4 + 8 = 12$	8	0	7

Como não há uma maioria absoluta (14 ou mais votos) efetua-se a contagem para a última preferência, resultando:

<i>Trail</i>	A	M	S	T
Última preferência	$8 + 7 = 15$	8	0	4

Elimina-se o *trail* A, pois é o que apresenta o maior número de últimas preferências.

A tabela de preferências reorganizada será:

Preferências	8	7	4	8
1.ª	M	T	S	T
2.ª	S	M	M	S
3.ª	T	S	T	M

Considerando a 1.ª preferência, temos:

<i>Trail</i>	M	S	T
1.ª preferência	8	4	$7 + 8 = 15$

Como o *trail* T (*trail* das Linhas de Torres) obteve uma maioria absoluta, é a prova escolhida pela Luísa.

2. Aplicando o método descrito, resulta:

Amigo Etapas	A	F	M
Valor global	177 €	210 €	135 €
Valor justo	$177 : 3 = 59 \text{ €}$	$210 : 3 = 70 \text{ €}$	$135 : 3 = 45 \text{ €}$
Distribuição dos prémios	Y: 102 €	X: 120 €	0 €
Ajuste	$59 - 102 = -43 \text{ €}$ PAGA	$70 - 120 = -50 \text{ €}$ PAGA	$45 - 0 = 45 \text{ €}$ RECEBE

$43 + 50 = 93 \text{ €}$ é o dinheiro disponibilizado pelos amigos A e F, que estará disponível para pagar ao amigo M.

$93 - 45 = 48 \text{ €}$ é o dinheiro que sobra e que será repartido igualmente pelos três amigos, $48 : 3 = 16 \text{ €}$, recebendo a Manuela apenas **61 €** ($45 + 16$) e nenhum prémio.

Assim, a correspondência será:

I – a) 210 € II – a) a Ana III – c) a Manuela IV – c) 61 €

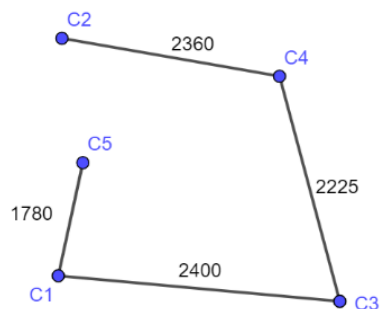
3. Considerando os valores das inscrições, por pessoa, podemos organizar a seguinte tabela:

Data de inscrição	Prova	Transporte
Setembro de 2024	K100 60 €	Não reservaram.
Janeiro de 2025	K100 90 €	
Dezembro de 2024	K100/2 $2 \times 40 = 80 \text{ €}$	$2 \times 4 = 8 \text{ €}$
Outubro de 2024	K50 $4 \times 35 = 140 \text{ €}$	$4 \times 3 = 12 \text{ €}$
Total	370	20 €

O valor total da inscrição e do transporte é de 390 €.

A empresa comparticipa com 60%, isto é, com $390 \times 0,6 = 234 \text{ €}$.

4. Iniciando o percurso em C2, e selecionando a aresta usando o método descrito, podemos construir o grafo seguinte:



O percurso será C2 – C4 – C3 – C1 – C5, de comprimento $2360 + 2225 + 2400 + 1780 = 8765$ m.

5.

- 5.1. I – O aumento será determinado pela diferença $C(10) - C(0)$.

$$C(0) = 20 + 5 \log_{10}(9 \times 0 + 10) = 25 \text{ milhares}$$

$$C(10) = 20 + 5 \log_{10}(9 \times 10 + 10) = 30 \text{ milhares}$$

Há um aumento de **5** milhares.

II – Considerando, numa tabela, os valores do gráfico relativo à zona **Norte**, para t igual a 10, 11 e 12, e fazendo a regressão linear, obtém-se um coeficiente de correlação $r = 1$.

	A	B	C	D
=				=LinRegIV
1	10.	5.184	Título	Regress...
2	11.	5.249	RegEqn	m*x+b
3	12.	5.314	m	0.065
4			b	4.534
5			r²	1.

III – No início de 2012, o número de utilizadores é $C(12) \approx 30,36$ milhares.

Logo, $\frac{30,36}{7} \approx 4,337$ que corresponde à região de **Lisboa e Vale do Tejo**.

IV – No início de 2011, o número de utilizadores é $C(11) \approx 30,187$ milhares.

Adicionando os utilizadores das regiões Norte, Centro e Lisboa e Vale do Tejo, em 2011:

$$5,249 + 6,561 + 8,717 = 20,527$$

$$\frac{20,527}{30,187} \approx 0,68 = \mathbf{68\%}$$

Assim, a correspondência será:

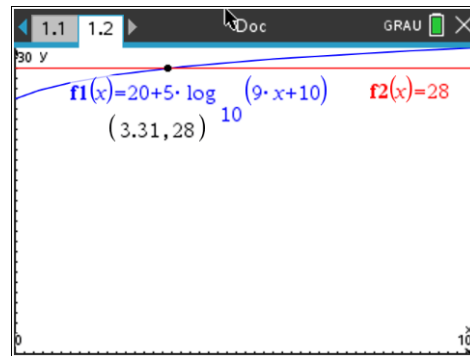
I – c) 5

II – a) Norte

III – c) de Lisboa e Vale do Tejo

IV – b) 68%

- 5.2. Como 20% dos utilizadores da AppCaminhadas, com a versão *Premium*, corresponde a 5600 subscritores, o total de subscritores desta app, nesse ano, foi $\frac{5600}{0,20} = 28\ 000$, ou seja, 28 milhares. Considerando no mesmo referencial as funções $f_1(x) = 20 + 5 \log_{10}(9x + 10)$ e $f_2(x) = 28$:



A abcissa do ponto de interseção é igual a 3,31.

Conclui-se que, no decorrer do ano de 2003, existiam 5600 subscritores da AppCaminhadas com a versão *Premium*.

- 5.3. 3000 utilizadores = 3 milhares e, para o ano 2015, temos $t = 15$, resultando $C(15) = 3 + T(15)$.

A opção correta é a **(A)**.

6.

- 6.1. Observando o gráfico da figura 2, o ponto de coordenadas (25, 45) corresponde a P_{60} .

Assim, 60% de 200 ($0,6 \times 200$) corresponde a 120.

A opção correta é a **(B)**.

- 6.2. Elaborando uma tabela de frequências relativas, temos:

Classes	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
[10, 20[	18%	18%
[20, 30[	$48 - 18 = 30\%$	48%
[30, 40[	$60 - 48 = 12\%$	60%
[40, 50[	$80 - 60 = 20\%$	80%
[50, 60[	$100 - 80 = 20\%$	100%

I – A classe modal é a que apresenta maior frequência relativa simples, ou seja, a classe **[20, 30[**.

II – A classe com o menor número de utilizadores é a de menor frequência relativa simples, ou seja, a classe **[30, 40[**.

III e IV – Os valores de x e de y estão associados ao valor mínimo e ao 1.º quartil.

O valor mínimo pertencerá à classe [10, 20[apenas sendo possível o **valor 11**.

O valor do 1.º quartil corresponde a uma percentagem de 25% que, observando a frequência relativa acumulada, pertencerá à classe $[20, 30[$, sendo apenas possível o **valor 22**.

Assim, a correspondência será:

I – b) $[20, 30[$ **II – c)** $[30, 40[$ **III – a)** 11 **IV – b)** 22

6.3. O quociente $\frac{20+2 \times 37+39+3 \times 41+43+2 \times 46+2 \times 52}{12} = 41,25$ é a média dos valores do grupo A, que é constituído por 12 pessoas.

Representando por a a média dos valores do grupo B, que é constituído por 24 pessoas, podemos escrever a igualdade associada à média das 36 pessoas dos dois grupos:

$$\begin{aligned} \frac{12 \times 41,25 + 24 \times a}{36} &= 45 \Leftrightarrow \frac{495 + 24a}{36} = 45 \\ \Leftrightarrow 495 + 24a &= 1620 \\ \Leftrightarrow 24a &= 1620 - 495 \\ \Leftrightarrow 24a &= 1125 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1125}{24} \\ \Leftrightarrow a &= 46,875 \text{ é o valor da média pedida.} \end{aligned}$$

6.4. Consideremos na calculadora as seguintes listas:

L1 (x)	L2 (y)
36	250
48	198
60	164
72	140
84	122

Obtemos a seguinte equação da regressão linear:

$$y = -2,617x + 331,8$$

Para $x = 50$, resulta:

$$y = -2,617 \times 50 + 331,8 = 200,95 \approx 201 \text{ min}$$

7.

7.1. Consideremos os acontecimentos:

N : “O inscrito nunca participou numa prova.”

S : “O inscrito pertence ao escalão etário Sub23.”

Tem-se que:

- $P(N) = 0,4$
- $P(S) = 0,2$

- $P(S|N) = 0,35$

Usando a definição de probabilidade condicionada, resulta:

$$P(S|N) = 0,35 \Leftrightarrow \frac{P(S \cap N)}{P(N)} = 0,35 \Leftrightarrow \frac{P(S \cap N)}{0,4} = 0,35$$

$$\Leftrightarrow P(S \cap N) = 0,35 \times 0,4$$

$$\Leftrightarrow P(S \cap N) = 0,14$$

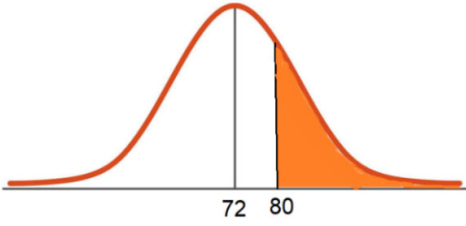
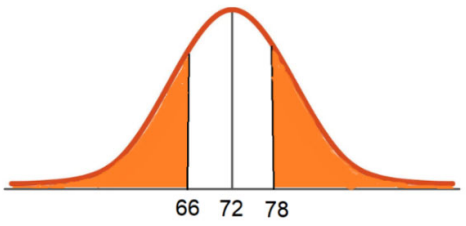
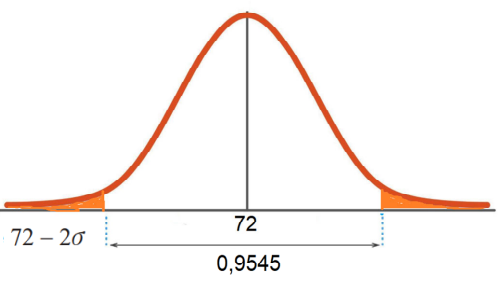
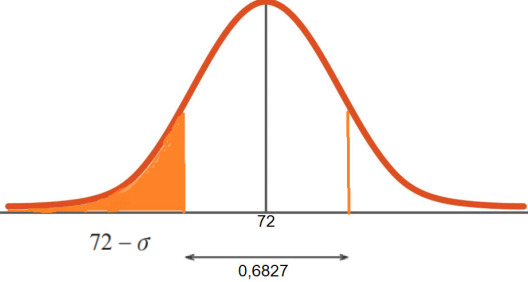
Organizemos as probabilidades na tabela seguinte:

	S	$\bar{S}$	Total
N	0,14	$0,4 - 0,14 = 0,26$	0,4
$\bar{N}$		$0,8 - 0,26 = 0,54$	$1 - 0,4 = 0,6$
Total	0,2	$1 - 0,2 = 0,8$	1

Assim, a probabilidade de o participante já ter participado numa prova deste tipo e não pertencer ao escalão etário Sub23 será $P(\bar{N} \cap \bar{S}) = 0,54$.

7.2. Seja a variável aleatória X : “Peso, em quilogramas, dos inscritos na prova, ao longo dos anos.”

Então, $X \sim N(\mu, \sigma) = N(72; \sigma)$.

	
I – Por observação da curva normal, o valor de $P(X > 80)$ tem de ser inferior a 0,5, pelo que a escolha será 0,45.	II – Utilizando a simetria da curva normal em relação ao valor médio, temos que $72 + 6 = 78$ e $72 - 6 = 66$, pelo que $P(X > 78) = P(X < 66)$.
	
III – Usando os valores de referência no formulário, resulta que $P(72 - 2\sigma < X < 72) = \frac{0,9545}{2} = 0,47725.$	IV – Usando os valores do formulário, podemos concluir que estamos a falar de $P(X < 72 - \sigma)$, pois $\frac{1-0,6827}{2} = 0,15865.$

Assim, a correspondência será:

I – a) 0,45 II – b) 66 III – b) 0,47725 IV – a) $72 - \sigma$